

Cálculo de la distancia máxima que justifica utilizar el modelo lineal en una reconstrucción de trayectoria balística

V. Torres-Zúñiga ^{a,*}, J.G. Bañuelos Muñetón ^b

^a *Licenciatura en Ciencia Forense, Facultad de Medicina, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito de la Investigación Científica, Ciudad Universitaria, Coyoacán, Ciudad de México, México.*

^b *Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, Coyoacán, Ciudad de México, México.*

*Endereço de e-mail para correspondência: vicentz@gmail.com. Tel.: +52-55-5623-2300 Ext.:81912.

Recebido em 22/06/2017; Revisado em 10/08/2017; Aceito em 23/09/2017

Resumen

Determinar la posición víctima-tirador es parte importante de la reconstrucción de hechos físicos. Por ejemplo, en un evento donde se dispara un arma de fuego, se debe aclarar la posición del objetivo impactado respecto al tirador. Pese a la carencia de parámetros físicos, por lo general, el modelo lineal es utilizado para determinar tales coordenadas. Sin embargo, durante el informe pericial o en la corte se debe aclarar cuánto dista este modelo básico del modelo parabólico, el cual es físicamente más correcto en la reconstrucción; porque, entre otras razones, contiene información de coordenadas, ángulo de disparo y velocidad inicial del proyectil. Proponemos comparar ambos modelos teóricos mediante una división directa, y definiendo un criterio de similaridad (acotado entre 0 y 100%); obteniendo una función solo dependiente de la velocidad inicial del proyectil, con la cual calculamos la longitud máxima a la que el modelo lineal es equivalente al parabólico. Aunque el análisis se puede sofisticar por métodos numéricos, nuestra propuesta es sencilla de exponer en la corte. Por ejemplo, si la velocidad inicial del proyectil es de 300 m/s, y suponemos que los modelos son equivalentes en hasta un 99%; entonces, 13.6 m es a distancia máxima a la que se puede aplicar el modelo lineal. En un sistema judicial donde se requiere precisión de los alcances metodológicos, esta información puede ser crucial para concluir en un veredicto verosímil.

Palavras-Chave: Balística; Trayectoria; Modelo lineal contra parabólico; Criterio de similaridad; Método analítico.

Abstract

Determining the victim-shooter position is an important part of the reconstruction of physical facts in criminalistics. For example, in an event where a firearm is fired, the position of the impacted target, relative to the shooter position, must be clarified in order to obtain physical evidence. Despite the lack of physical parameters, the linear model is commonly used to determine such coordinates. However, in front of the court, all the evidence given by the expert must clarify the precision of this basic model against the parabolic one, which is physically more accurate in crime scene reconstructions. Indeed, by using the latter model coordinate information, firing angle and initial velocity of the projectile, among other parameters, can be effectively obtained. In this report we compare and contrast these two theoretical approaches by a direct division and define a similarity criterion (from 0 to 100%). From this analysis we obtained a function which is capable of calculating the maximum length at which the linear model may be considered as equivalent to the parabolic one, being this function only dependent on the initial velocity of the projectile. Although this analysis comprising numerical methods can be considered to some extent, as sophisticated, our proposal and the respective interpretation are simple to expose in the court. For instance, if the initial velocity of the projectile is 300 m/s and we assume that these two approaches are equivalent up to 99%; then, according to our model, 13.6 m is the maximum distance to which the linear model can be applied. In fact, in a judicial system where precision of the methodological scope is required, this kind of information may be critical in order to decide on a verdict.

Keywords: Ballistics; Trajectory; Linear model against parabolic; Similarity criterion; Analytical method.

1. INTRODUCCIÓN

El debate judicial sobre la precisión y exactitud entre pruebas periciales, es cada vez más frecuente e importante para alcanzar un veredicto [1]. Especialmente en los países donde se adopta el sistema penal acusatorio, ahí la defensa oral de la investigación forense es fundamental. En Latinoamérica son varios los países que han adoptado tal sistema. Por ejemplo, Guatemala, El Salvador, República Dominicana, Perú, Chile, Colombia, Costa Rica, entre otros. México recientemente adoptó este sistema en el año 2016 [2].

Existen varias propuestas para valorar la prueba científica. Por ejemplo, en el criterio de Daubert, entre otras características, se sugiere que: “las pruebas científicas determinen la probabilidad de error relativa a la técnica empleada” [2]. En este sentido, cada técnica pericial debe definir sus criterios de error relativo. Es decir, justificar los alcances y límites de las conclusiones emitidas frente al jurado.

En contraste con los dictámenes de corte social, en las periciales cercanas al área de físico-matemáticas, la tarea de determinar su incertidumbre puede ser más sencilla, al grado de solo requerir desarrollos analíticos y sin necesidad de la perspectiva numérico-probabilística. Por ejemplo, el criminalista (en colaboración con el perito en balística) puede determinar la posición víctima-victimario en un incidente de arma de fuego, empleando un modelo de línea recta. Tal propuesta es sencilla, requiere pocos parámetros para su construcción y es válida para distancias cortas. Lamentablemente, esta teorización carece de información física y es menos exacta en la descripción de la trayectoria. El empleo injustificado de una propuesta como esta, puede cuestionarse e invalidarse en la corte.

En la literatura, se puede encontrar abundante información para la construcción (por medio de trigonometría y la observación de efectos) del modelo lineal y el parabólico [3-6]. Sin embargo, es escasa la información (más allá de máximas de experiencia) sobre la pertinencia de utilizar un modelo en específico, respecto al otro. En general, son pocas las propuestas cuantitativas que permiten comparar un modelo o teoría criminalística contra otra.

La reconstrucción de trayectoria balística es esencial en el contexto forense. Pues, de acuerdo con la oficina de la Organización de las Naciones Unidas Contra la Droga y el Delito ONUDC, en el año 2013, Latinoamérica (Sur, Centro y Caribe) es la región donde, al menos, el 60% de los asesinatos son ocasionados por armas de fuego [7]. En México, en el año 2013, por lo menos, el 27% de los homicidios fue ocasionado por arma de fuego [8], en una proporción de 22 homicidios por cada 100 habitantes [7].

En este trabajo, utilizamos conceptos de geometría analítica para proponer la comparación entre los modelos mediante su división; definiendo un coeficiente de similitud C. El desarrollo de esta idea, nos permitió obtener una función simple donde la distancia máxima (a la cual ese criterio es válido) es directamente proporcional a la velocidad del proyectil, al instante de abandonar la boca del cañón. Esta propuesta inicial se enfoca en el modelo lineal y el parabólico; exponemos a detalle el desarrollo teórico, realizamos una discusión amplia de la pertinencia de la propuesta frente a sus restricciones, mostramos un ejemplo experimental para ejemplificar su utilización y obtenemos C de tres análisis de casos reportados en la literatura especializada.

2. DESARROLLO TEORICO

En el área de la física es frecuente encontrar la operación de división como una herramienta teórica para realizar comparaciones entre objetos y conceptos. Por ejemplo, la definición de medición se sustenta en la comparación de un parámetro y un estándar preestablecido [9]. Además, muchos conceptos físicos son definidos a través de tasas de cambio; tales como: el ímpetu y la potencia, entre otras [9]. En este caso, proponemos emplear la división para comparar el modelo parabólico sobre el lineal; es decir: y_p/y_l . A partir de la definición de geometría analítica para un lugar geométrico, escribimos la ecuación que describe a la parábola (y_p) sobre la ecuación de la línea recta (y_l) [10]:

$$\frac{y_p}{y_l} = \frac{\alpha x_C^2 + \beta x_C + \gamma}{m x_C + b}, \quad (\text{Ec. 1})$$

donde α , β y γ son los coeficientes de la parábola, mientras que m y b son de la línea recta. Ahora escogemos un sistema coordenado de referencia conveniente. Por ejemplo, donde el disparo sea horizontal y cuyo origen es la coordenada: (0,-1). Estas definiciones nos permiten evitar ambigüedades y puntos de discontinuidad. Por ejemplo, si el origen del disparo fuera (0,0) implicaría que en el origen: y_p/y_l es una cantidad indeterminada. Otro caso a evitar sería escoger como origen la coordenada (0,1), ya que implicaría que la altura y_p sería cero en el tramo intermedio de la trayectoria; causando una confusión en la determinación de la distancia horizontal: x_C . Escoger el origen como (0,-1) cuenta con una ventaja: la parábola será monótona decreciente, evitando que para una misma distancia x_C existan dos alturas y_p iguales. De hecho, esta selección permite que curva y recta se separen en función de x_C .

En este punto, es oportuno aclarar que la constante -1 se refiere a un metro de longitud; con ello se logra congruencia con las unidades de desplazamiento. Así, $[x] = m$, $[v] = m/s$, $[g] = m/s^2$, y la comparación de modelos carece de unidades, lo que es de esperarse dimensionalmente.

Numéricamente $y_p/y_l \geq 1$. Sin embargo, una cantidad porcentual (entre 0 y 100%) ofrece una mejor descripción en la comparación de los objetos. Así, sugerimos definir una variable auxiliar: C , en el intervalo de los números reales de $(0,1]$ que mantiene la siguiente relación:

$$\frac{1}{C} = \frac{y_p}{y_l} \tag{Ec. 2}$$

Con las condiciones iniciales anteriores, tenemos que $\gamma = b = -1$, y que $m = 0$. Utilizando esta información y modificando signos podemos describir la Ec. 1, de la siguiente forma:

$$\frac{1}{C} = -\alpha x_C^2 - \beta x_C + 1 \tag{Ec. 3}$$

Ahora, considerando los parámetros físicos de la trayectoria parabólica de un proyectil, donde v_0 es la velocidad inicial, θ el ángulo de disparo y g la aceleración debido a la gravedad, reescribimos:

$$\alpha = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \tag{Ec. 4a}$$

$$\beta = \tan \theta \tag{Ec. 4b}$$

Sustituyendo las Ec. 4a y Ec. 4b en la Ec. 3, y considerando que el disparo es horizontal (implicando: $\cos(0) = 1$ y $\tan(0) = 0$). Podemos simplificar la Ec. 3:

$$\frac{1}{C} = \frac{g}{2v_0^2} x_C^2 + 1. \tag{Ec. 5}$$

Finalmente, despejamos x_C y obtenemos:

$$x_C = v_0 \sqrt{\left(\frac{1}{C} - 1\right) \frac{2}{g}} \tag{Ec. 6}$$

La Ec. 6 es suficiente para establecer la distancia límite donde son equivalentes los modelos en función de la velocidad inicial del proyectil y un criterio C . Y si se conoce la velocidad, a través de la Ec. 6 se puede conocer la similitud entre modelos ante una medida x_C previamente realizada.

2.1. ¿Qué significa el criterio C ?

El criterio C cuantifica el parecido entre los modelos parabólico y lineal. Así, se puede determinar hasta que distancia dejaría de existir la semejanza acotada por C . Por ejemplo, si decimos que el criterio es $C = 100\%$,

implica que los lugares geométricos coinciden $y_p = y_l$, lo cual solo se satisface en el punto origen; de modo que la distancia máxima (coincidente en 100% entre modelos) es cero metros: $x_{100\%} = 0$ m. Si el criterio disminuye en $C = 90\%$, entonces esta distancia aumenta. Así, al disminuir el criterio, se incrementa la longitud. De hecho, al acercar el criterio a cero, la distancia tiende hacia el infinito. La Fig. 1 presenta la gráfica de $x(C)$ para tres velocidades iniciales de un proyectil; en el recuadro se muestra un acercamiento de la tendencia con un criterio entre 70 y 100%.

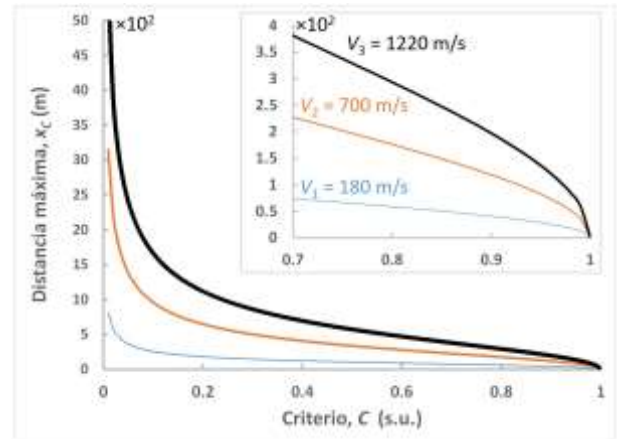


Fig. 1. Gráfica de la distancia máxima x_C , en que se asemejan los modelos, en función del criterio C .

2.2. Sustituyendo valores

En física el uso de estos criterios es común. Por ejemplo, saber que $\sin(x)/x = 1$ (para x pequeño) es la base de la descripción teórica del péndulo simple [9]. En el laboratorio, esta cantidad no supera los 0.17 radianes (10 grados). Para nuestro caso, requerimos ser rigoristas; en virtud de que estos modelos son aplicados en un contexto judicial. Afirmaremos que una línea se asemeja a una parábola en hasta un 99%; declarando que por debajo de este valor los modelos no son similares. Así, obtenemos una ecuación que calcula la distancia máxima de semejanza (en metros) solo en función de la velocidad inicial del proyectil (expresada con unidades de metro sobre segundo):

$$x_{0.99} = 0.045v_0. \tag{Ec. 7}$$

Esta última ecuación es simple, establece el límite de la distancia en la que los modelos son 99% similares. Por ejemplo, si el proyectil es disparado a una velocidad de 300 m/s, hasta una distancia de 13.6 m se tendría una similitud de 99% entre los dos modelos.

La mayoría de casos forenses típicos de balística implican trayectorias relativamente pequeñas; además, por lo general, los proyectiles alcanzan velocidades subsónicas, pues suelen emplearse armas cortas o convencionales. Por estas dos razones, de momento

hemos evitado introducir factores que implican el arrastre por resistencia. Sin embargo, en futuras contribuciones debemos mostrar la comparación entre los modelos lineal, parabólico y los que consideran la fricción.

2.3. Cambios de origen y ángulo

Con el fin de evitar confusiones al aplicar las Ec. 6 y Ec. 7, debemos realizar algunos comentarios adicionales. La definición de las coordenadas del origen solo están fijas para tales ecuaciones y el caso particular de disparo horizontal. Es decir, en el lugar de la investigación se puede utilizar el sistema coordenado que más convenga. El valor de x_C es una distancia escalar, no un segmento vectorial fijo. En la práctica, la mayoría de los ángulos de disparo son diferentes a cero. Sin embargo, al definir un criterio rigorista de $C = 99\%$ obligamos que la aproximación lineal sea adecuada. Mediante nuestra propuesta, una trayectoria de curva pronunciada jamás será confundida con una línea recta. Sin embargo, al tender líneas inclinadas, la distancia x_C debe medirse paralela a tal segmento y no sobre el eje horizontal. De este modo, argumentamos que la propuesta es general: para cualquier punto coordenado de dónde proviene el proyectil y a cualquier ángulo.

3. OBSERVACIONES DE LABORATORIO

Con el fin de probar las ecuaciones expuestas en este documento con los hechos facticos, realizamos una experiencia de laboratorio: disparamos horizontalmente (con un error: $\pm 0.1^\circ$) una pistola de dardos (Nerf: modelo jolt). Utilizamos una videocámara (Canon: Rebel Ti) para registrar el vuelo de un proyectil. El video-análisis lo realizamos mediante Tracker-physics [11], un software gratuito, multiplataforma y que hemos utilizado anteriormente para estudiar la física de eventos de interés forense.

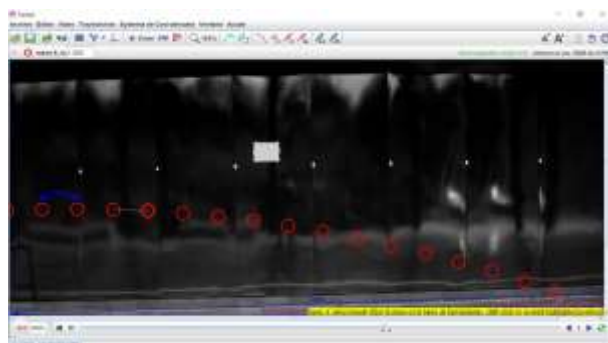


Fig. 2. Captura de pantalla de la interface del software: Tracker. Muestra los puntos marcados en el movimiento del proyectil.

La Fig. 2 muestra una captura de pantalla del programa Tracker; realizamos el video usando un fondo negro y proyectiles de punta blanca. Además, utilizamos un apuntador láser para asegurar un disparo horizontal.

Mediante tales precauciones registramos 17 posiciones del viaje del dardo, los movimientos $x(t)$ y $y(t)$ son representados en la Fig. 3.

Como indica la teoría, las dos graficas de la Fig. 3 son muy diferentes, la distribución de datos en la horizontal se ajustó a una línea recta, los datos en la vertical a una parábola. En ambos casos se obtuvieron valores muy altos en la correlación R^2 . Además, comparando las ecuaciones emanadas de la teoría física [9], obtenemos que el valor de la aceleración en caída libre g es muy cercano al estándar de 9.8 m/s^2 y que la velocidad inicial del dardo es igual a 13.13 m/s .

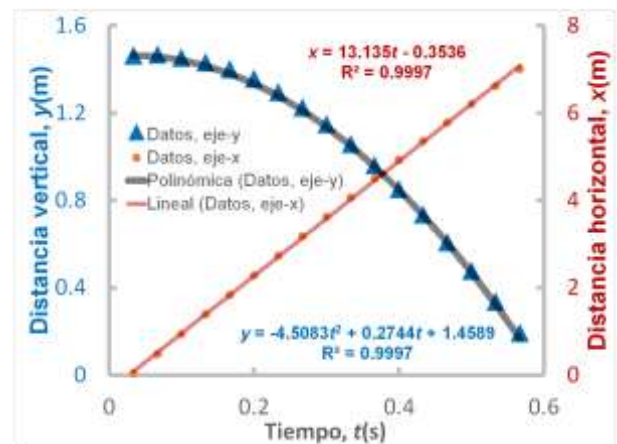


Fig. 3. Datos y ajustes físico teóricos del movimiento por componentes horizontal y vertical del proyectil en función del tiempo.

Con estos datos, como se muestra en la Fig. 4, las coordenadas de la trayectoria del proyectil se ajustan (con muy alta correlación) a una parábola. De tal modo, con toda seguridad, en ese caso, podemos menospreciar los fenómenos de arrastre por fricción y efectos similares en el vuelo del proyectil [9].

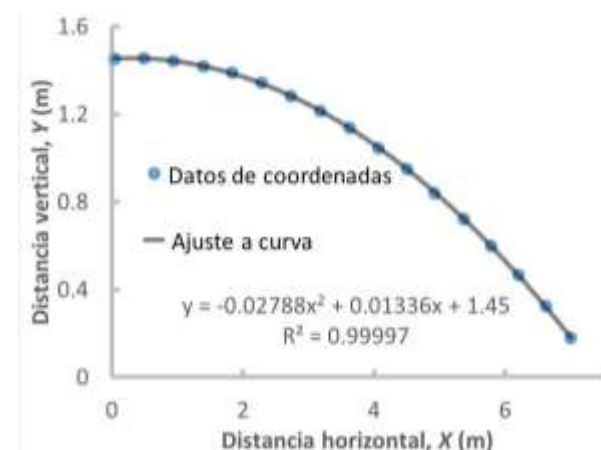


Fig. 4. Datos de coordenadas espaciales del movimiento del proyectil, ajustados al modelo físico-matemático de una parábola.

Utilizando la Ec. 7, calculamos que 0.59 m es la distancia máxima en que el modelo lineal y parabólico son equivalentes en un 99% . En la Fig. 2 se marca (indicadores en azul) esta distancia. Si bien este video-

análisis se pudo realizar con proyectiles más veloces, las condiciones de vuelo aquí presentadas permiten apreciar, con mayor claridad, el significado de utilizar un modelo lineal sobre el parabólico. Enfatizando la importancia de que cada modelo puede ser el correcto en un contexto determinado; es decir, si bien el modelo parabólico cuenta con más información física, puede ser difícil de determinar sus parámetros a distancias cortas. En tal caso, sería más apropiado el modelo lineal, con la restricción cuantitativa expresada por la Ec. 7.

De hecho, la Ec. 7 se puede aplicar en diferentes tipos de reconstrucciones de proyectiles lanzados por: armas de fuego, con la mano o expulsados por diferencia de presión, como en el caso de las manchas hemáticas al producirse una herida.

4. CONTRASTANDO MEDIANTE CASOS REPORTADOS

Finalmente, calculamos el valor mínimo de *C* en tres casos forenses reales, reportados en la literatura

especializada. Tales artículos contienen detalles de la investigación y los análisis realizados, de modo que se obtuvieron: 1) la velocidad mínima del proyectil al ser disparado, 2) la distancia máxima en la trayectoria horizontal, 3) el ángulo de disparo y 4) el modelo teórico utilizado para la reconstrucción.

La Tab. 1 resume los valores encontrados; sin contradicción, en los tres casos encontramos congruencia entre el uso del modelo lineal y el significado de *C*. Es decir, en los dos casos donde se consideró utilizar el modelo lineal, *C* cuenta con un valor muy alto, superior al 99%. Pero, cuando se necesitó un modelo más sofisticado, *C* adquiere un valor muy pequeño, alrededor de 2%. Esto implica que, en efecto, *C* puede ser utilizado para evaluar la utilización del modelo lineal en balística forense; además, nos alienta a sofisticar la propuesta para abarcar otras situaciones y modelos teóricos.

Tab. 1. Datos de tres casos forenses reales utilizados para calcular el valor de *C*.

# Caso/referencia	Velocidad mínima (m/s)	Distancia máxima (m)	Ángulo (grados)	Modelo	C%
1/[5]	300	9	~0	Lineal	99.6
2/[12]	230	9	~9	Lineal	99.3
3/[13]	253	808	>45	Curvo	2

5. CONCLUSIONES

Desde la perspectiva de la geometría analítica, proponemos que la distancia máxima en la que el modelo lineal es equivalente al modelo parabólico en una trayectoria balística, es una función de la velocidad inicial del proyectil y el valor de un criterio acotado entre 0 y 1, ver Ec. 6. Para ello, utilizamos un cociente entre las funciones parabólica y lineal. Además, con la finalidad de evitar contradicciones teóricas, establecimos dos restricciones: 1) un disparo en dirección horizontal y 2) las coordenadas del origen son (0,-1) m. Con el propósito obtener generalidad y una alta precisión, sugerimos que el criterio mínimo a considerar en aplicaciones forenses debe ser de 99%. De tal forma, la distancia máxima para aplicar el modelo lineal es directamente proporcional a la velocidad inicial del proyectil, descrita por la Ec. 7.

Realizamos una medición con un proyectil disparado a baja velocidad, obteniendo un resultado aceptable. Comparando la información de casos forenses, también encontramos congruencia con el uso de *C* como un criterio para validar el empleo del modelo lineal para la reconstrucción de la trayectoria del proyectil.

Futuros trabajos deberán mostrar la precisión y exactitud entre modelos de trayectoria de proyectiles

donde se consideren los efectos de fricción del aire durante el vuelo del proyectil.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo recibió financiamiento de la Universidad Nacional Autónoma de México mediante el proyecto UNAM-PAPIME-PE107216, los autores agradecen el apoyo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J.C.J. Eastwood. Educating Jurors about Forensic Evidence: Using an Expert Witness and Judicial Instructions to Mitigate the Impact of Invalid Forensic Science Testimony, *J. Forensic Sci.* 60(6), 1523-1528, 2015.
- [2] Z.G. Castillo. La prueba científica en el sistema penal acusatorio y el licenciado en Ciencia Forense como un nuevo perfil profesional ad hoc, en Ciencia forense en el contexto del nuevo sistema de justicia penal, México, 23-52, 2016.
- [3] L.S. Flores-Martínez. Análisis de signos característicos en las heridas producidas por el paso de proyectiles disparados por armas de fuego calibre 9mm. con el fin de establecer distancia - posición de víctima-

- victimario. Tesis de grado, Instituto Tecnológico Superior Policía Nacional, 2015.
- [4] E.K.W. Mattijssen. Bullet trajectory reconstruction - Methods, accuracy and precision. *Forensic Sci. Inter.* **262**, 204-211, 2016.
- [5] A.F.C.M.J. Galligan. Gunshot wound trajectory analysis using forensic animation to establish relative positions of shooter and victim, *Forensic Sci. Inter.*, **271**, e8-e13, 2017.
- [6] M. Knox. Forensic engineering analysis methods employed for the purpose of determining the location of a long-range shooter based on terminal bullet trajectory, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE), 15, 2013.
- [7] Oficina de las Naciones Unidas Contra la Droga y el Delito. Global Study on Homicide 2013. EEUU (2013).
- [8] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), Boletín de prensa Núm. 289/16. México, 25/julio/2016.
- [9] D. Halliday, *Fundamentals of Physics Extended*, Wiley, 2013.
- [10] C. H. Lehmann. *Geometría Analítica*. México: Limus, 1989.
- [11] D. Brown, «tracker video analysis and modeling tool,» [En línea]. Available: <http://physlets.org/tracker/>. [Último acceso: 21 06 2017].
- [12] T. Colard, Y. Delannoy, F. Bresson, C. Marechal, J.S. Raul, V. Hedouin. 3D-MSCT imaging of bullet trajectory in 3D crime scene reconstruction: Two case reports. *Leg. Med. (Tokyo)* **15(6)**, 318-322, 2013.
- [13] B.R. Moran, Capítulo 13: Shooting Incident Reconstruction, Part I, en: W.J. Chisum, B.E. Turvey (Eds.) *Crime Reconstruction*. second ed. Academic Press, Burlington; 406–408, 2007.